Scientific and Educational Reports of the Faculty
of Science and Technology, Kochi University
Vol. 2 (2019), No.2

T 構造による UMP を持つ完全グラフの辺着色法

伊藤　宗彦 Munehiko Itō（高知大学理工学部）

概要

距離空間 X は，同相な距離が存在して条件「 X の任意の異なる 2 点に対して中点が唯一つ存在する」を満たす時，UMP(unique midset property)を持つと言う。有限集合においては，完全グラフの辺着色問題として言い換える事が出来る。即ち，有限距離空間Xが UMP を持つ事は『 X と同じ濃度の完全グラフ K_n の辺着色が存在して条件「 K_n の任意の異なる 2 点 a,b に対して第 3 点 c が唯一つ存在して辺 (a,c) の色と辺 (b,c) の色が同じ」を満たす』と同値である。

この論文において，$\mathrm{ump}(K_{2k}) = k$ ($k = 7, 9, 11, 13, 15, 17$)を示す。($\mathrm{ump}(K_{2k})$は UMP を持つ K_{2k} の辺着色数の最小値を表す。)

１．序文

UMP は実数直線の特徴的な性質の一つである[1]。伊藤，大田，小野は論文[2], [3]において実数直線の重要な部分集合に対して UMP の研究を行い一連の成果を得た。無限集合上の代表的な成果としては「無理数空間は UMP を持つ」があげられる。有限集合については，「$\mathrm{ump}(K_{2k+1}) = k$ ($k \geq 1$)」があるが，正$2k+1$角形を考えれば良いので自明で，問題は偶数濃度に限られる。偶数濃度については「$k \leq \mathrm{ump}(K_{2k}) \leq 2k-1$ ($k \geq 3$)」が得られたが，最小着色数を決定できたのは「$\mathrm{ump}(K_6) = 4$, $\mathrm{ump}(K_8) = 5, \mathrm{ump}(K_{10}) = 5$」位であった。

今回の成果は「$\mathrm{ump}(K_{10}) = 5$」を発展させたものである。10濃度から一気に34濃度まで拡張できたのは，辺着色の核となる T 構造を今回発見できた事と，辺と mid point を類別してコード化しコンピューターに乗せる事に成功した事による。T 構造という辺着色の核を基礎に置き，それをグラフ全体に広げる事で計算量を飛躍的に削減できた事も成功の鍵である。

Received: January 20, 2019
Reviewed by anonymous referee(s), and accepted: Jannuary 29, 2019
Published: March 27, 2019

２．本論

グラフ $K_{2k}=(V,E)$ の（ $k=3,5,7,9,11,\dots$)の頂点の組 (a,b) （ $a\neq b$ ）を次の様にして類別する。$V=\{w_0,w_1,w_2,\dots,w_{2k-1}\}$ とし，同じ点を中心とする正 k 角形を 2 重に配置し，外側の正 k 角形の頂点を時計回りに $\{w_0,w_1,w_2,\dots,w_{k-1}\}$, 内側の正 k 角形の頂点を時計回りに $\{w_k,w_{k+1},w_{k+2},\dots,w_{2k-1}\}$ とする。頂点の組 (a,b) のタイプが $\mathrm{O}i$ （ $i=1,2,3,\dots,k-1$)であるとは，頂点の順序対 (w_0,w_i) を正 k 角形の中心を回転中心として $2\pi n/k$ 回転させた時 (a,b) 或いは (b,a) と等しくなる整数 n がある時であり，$\mathrm{type}(a,b)=\mathrm{O}i$と書く。頂点の組 (a,b) のタイプが $\mathrm{I}i$ （ $i=1,2,3,\dots,k-1$ ）であるとは，頂点の順序対 (w_k,w_{k+i}) を正 k 角形の中心を回転中心として $2\pi n/k$ 回転させた時 (a,b) 或いは (b,a) と等しくなる整数 n がある時であり，$\mathrm{type}(a,b)=\mathrm{I}i$と書く。頂点の組 (a,b) のタイプが $\mathrm{B}i$ $\left(i=0,\pm1,\pm2,\dots,\pm(k-1)\right)$ であるとは，$i+k$ を k で割った余りを j として頂点の順序対 $\left(w_k,w_j\right)$ を正 k 角形の中心を回転中心として $2\pi n/k$ 回転させた時 (a,b) 或いは (b,a) と等しくなる整数 n がある時であり，$\mathrm{type}(a,b)=\mathrm{B}i$ と書く。この類別に O1 から $\mathrm{O}(k-1)$, I1 から $\mathrm{I}(k-1)$, B0 から $\mathrm{B}\pm(k-1)$ を用意したが，実際には約半分の O1 から $\mathrm{O}\,[k/2]$, I1 から $\mathrm{I}\,[k/2]$, B0 から $\mathrm{B}\pm[k/2]$ の同値類が出来る。（ここで $[k/2]$ は$k/2$ 以下の最大の整数） これら全ての同値類の集合を T_{2k} で表す。辺 (a,b) のタイプは頂点の組 (a,b) のタイプと定義する。

次に，V の各頂点 w に対して前述の頂点の組の同値類を要素とする集合 $\mathrm{MPtype}(w)$ を定義する。$\mathrm{type}(a,b)\in\mathrm{MPtype}(w)$ とは，ある $(c,d)\in\mathrm{type}(a,b)$ が存在して，$(c,w),(d,w)\in E$ で，辺 (c,w) の色と辺 (d,w) の色が同じになる時である。

補題 1. T_{2k} は完全グラフ K_{2k} （ $k=3,5,7,9,11,\dots$ ）の辺集合の分割である。

補題 2. $|\mathrm{T}_{2k}|=2k-1$ （ $k=3,5,7,9,11,\dots$ ）。

定理 1. グラフ $K_{2k}=(V,E)$ の頂点集合 V を $\{w_0,w_1,w_2,\dots,w_{2k-1}\}$ とする時，次の条件を満たす V 上の置換 σ と結合位置を示す整数 c が存在するならば，全ての辺が着色された辺集合 E が存在してグラフ $K_{2k}=(V,E)$ は完全グラフで UMP を持ち，$\mathrm{ump}(K_{2k})=k$ である。（ $k=5,7,9,11,13,\dots$ ）

(1) $\sigma(0)=0$ 。

(2) $1\leq c\leq 2k-3$ 。

(3) 辺集合 E_0 を $\left\{\left(w_{\sigma(i)},w_{\sigma(i+1)}\right): 0\leq i\leq 2k-3\right\}\cup\left\{\left(w_{\sigma(c)},w_{\sigma(2k-1)}\right)\right\}$

とした時，$\{\ \mathrm{type}(e) : e \in E_0\} = \mathrm{T}_{2k}$ 。

（ E_0 の様に 4 点以上の頂点列の最後を除く頂点を順番に辺で結び，この内の両端点以外のある 1 頂点に除いていた最後の 1 頂点を辺で結んでできる構造を T 構造と呼ぶ。）

(4) E_0 の辺を全て同じ色0で塗った時，$\{\ \mathrm{type}(a,b) : \mathrm{type}(a,b) \in \mathrm{MPtype}(w),\ w \in V\ \} = \mathrm{T}_{2k}$ 。

証明：

条件(3)の $\{\ \left(w_{\sigma(i)}, w_{\sigma(i+1)}\right) : 0 \le i \le 2k-3\ \}$ の濃度は $2k-2$ であるから，全体では 1 増えた $|E_0| = 2k-1$ である。この事と補題 2 より条件(3)の等式は E_0 から T_{2k} への対応が全単射である事を意味するので，E_0 は各タイプの辺をちょうど 1 つずつ含んでいる。そうすると，E_0 を $2\pi i/k$ 回転させたものを E_i とすれば，$\{\ E_i : i = 0,1,2,\dots,k-1\ \}$ は互いに素となり，$|\{\ E_i : i = 0,1,2,\dots,k-1\ \}| = k(2k-1)$ となるから，$E = \cup\{\ E_i : i = 0,1,2,\dots,k-1\ \}$ とすれば K_{2k} は完全グラフになる。

また，$\{\ E_i : i = 0,1,2,\dots,k-1\ \}$ は互いに素である事から， E_i を色 i で塗っても塗り替えは起きないので，全ての E_i を塗り終えた状態で E_0 以外の各 E_i についても条件(4)の等式が成り立つ。($i = 1,2,3,\ \dots,k-1$)

グラフ (V, E_0) において，$\left|\mathrm{MPtype}(w_{\sigma(i)})\right| = 1$ ($i = 1,2,3,\cdots,2k-3, i \ne c$)，$\left|\mathrm{MPtype}(w_{\sigma(c)})\right| = 3$， $\left|\mathrm{MPtype}(w_{\sigma(i)})\right| = 0$ ($i = 0, 2k-2$) であるので条件(4)の等式と補題 2 より $\{\ \mathrm{MPtype}(w) : w \in V\ \}$ は互いに素である。これが他の各 E_i についても成り立つ。($i = 1,2,3,\dots,k-1$)

グラフ K_{2k} が UMP を持つ事を示す為に，先ず，どの頂点の組 (a,b) に対しても mid point となる頂点がある事を示す。補題 1 と条件(4)より $w, w_a, w_b \in V$ が存在して， $\mathrm{type}(a,b) = \mathrm{type}(w_a, w_b)$， $\mathrm{type}(w_a, w_b) \in \mathrm{MPtype}(w)$ 即ち辺 (w_a, w) の色と辺 (w_b, w) の色が 0 である。(a,b) は (w_a, w_b) を $2\pi i/k$ 回転させたものだとすると，w を $2\pi i/k$ 回転させた頂点は (a,b) の mid point となる。

次に，どの頂点の組 (a,b) に対しても mid point となる頂点は高々1 つである事を示す。これを否定して，ある頂点の組 (a,b) に対して異なる頂点 c_1 と c_2 が存在して辺 (a, c_1) と辺 (b, c_1) の色が同じ i で，辺 (a, c_2) と辺 (b, c_2) の色が同じ j であったとする。$i = j$ であったとすると，$\{\ \mathrm{MPtype}(w) : w \in V\ \}$ は互いに素である事に矛盾する。$i < j$ であったとする。a, b, c_1 をそれぞれ $2\pi(j-i)/k$ 回転させたものを $a^+, b^+, {c_1}^+$とする。${c_1}^+ = c_2$ であった場合は，$a \ne a^+, b \ne b^+$ なので c_2 から 4 本以上の辺が出ている事になり，E_j の構成方法，つまりは条件(3)の E_0 の辺構成方法と矛盾する。${c_1}^+ \ne c_2$ であった場合は，グラフ (V, E_j) においては，$\mathrm{type}(a,b) \in \mathrm{MPtype}({c_1}^+)$，$\mathrm{type}(a,b) \in \mathrm{MPtype}(c_2)$ で

あるから $\{\ \mathrm{MPtype}(w) : w \in V\ \}$ は互いに素である事に矛盾する。従って，どの頂点の組 (a,b) に対しても mid point となる頂点は高々1 つである。

故に，グラフ $K_{2k}=(V,E)$ は UMP を持つ。使った色は 0 から $k-1$ である事と論文[2]の Proposition 2（$For\ \ each\ \ k \geq 3,\ k \leq \mathrm{ump}(K_{2k}) \leq 2k-1$ ）から $\mathrm{ump}(K_{2k})=k$ である。

定理 2. $\mathrm{ump}(K_{2k})=k$ ($k=7,9,11,13,15,17$)。
証明：
各 k ($k=7,9,11,13,15,17$)について定理 1 の条件を満たす V 上の置換 σ と結合位置を示す整数 c を示す。E の着色は定理 1 の証明における着色と同じである。

$k=7$：

$\sigma=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 0 & 1 & 7 & 3 & 6 & 9 & 8 & 12 & 5 & 10 & 2 & 11 & 13 & 4 \end{pmatrix}$，$c=4(w_6)$ と定めると，辺集合 $E_0=\{\ (w_0,w_1),\ (w_1,w_7),(w_7,w_3),(w_3,w_6),(w_6,w_9),(w_9,w_8),(w_8,w_{12}),(w_{12},w_5),(w_5,w_{10}),(w_{10},w_2),(w_2,w_{11}),(w_{11},w_{13}),(w_6,w_4)\ \}$ となり辺のタイプは O1, B1, B3, O3, B-3, I1, I3, B0, B2, B-1, B-2, I2, O2 となるので条件(3)を満たしている。
グラフ (V,E_0) における $\mathrm{MPtype}(w)$ は，$\mathrm{MPtype}(w_0)=\emptyset$，$\mathrm{MPtype}(w_1)=\{\mathrm{B0}\}$，$\mathrm{MPtype}(w_7)=\{\mathrm{O2}\}$，$\mathrm{MPtype}(w_3)=\{\mathrm{B\text{-}1}\}$，$\mathrm{MPtype}(w_6)=\{\mathrm{B1, O1, B2}\}$，$\mathrm{MPtype}(w_9)=\{\mathrm{B\text{-}2}\}$，$\mathrm{MPtype}(w_8)=\{\mathrm{I3}\}$，$\mathrm{MPtype}(w_{12})=\{\mathrm{B\text{-}3}\}$，$\mathrm{MPtype}(w_5)=\{\mathrm{I2}\}$，$\mathrm{MPtype}(w_{10})=\{\mathrm{O3}\}$，$\mathrm{MPtype}(w_2)=\{\mathrm{I1}\}$，$\mathrm{MPtype}(w_{11})=\{\mathrm{B3}\}$，$\mathrm{MPtype}(w_{13})=\emptyset$ となるので条件(4)を満たしている。従って定理 1 より K_{14} は完全グラフで UMP を持ち，$\mathrm{ump}(K_{14})=7$ である。

$k=9$：

$\sigma=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 0 & 1 & 3 & 9 & 8 & 4 & 11 & 2 & 15 & 13 & 14 & 6 & 17 & 12 & 7 & 10 & 16 & 5 \end{pmatrix}$，

$c=4(w_8)$ と定めると，辺集合 $E_0=\{\ (w_0,w_1),\ (w_1,w_3),(w_3,w_9),(w_9,w_8),(w_8,w_4),(w_4,w_{11}),(w_{11},w_2),(w_2,w_{15}),(w_{15},w_{13}),(w_{13},w_{14}),(w_{14},w_6),(w_6,w_{17})\ (w_{17},w_{12}),(w_{12},w_7),(w_7,w_{10}),(w_{10},w_{16}),(w_8,w_5)\ \}$ となり辺のタイプは O1, O2, B3, B-1, O4, B2, B0, B-4, I2, I1, B1, B-2, I4, B4, B-3, I3, O3となるので条件(3)を満たしている。グラフ (V,E_0) における $\mathrm{MPtype}(w)$ は，$\mathrm{MPtype}(w_0)=\emptyset$，$\mathrm{MPtype}(w_1)=\{\mathrm{O3}\}$，$\mathrm{MPtype}(w_3)=\{\mathrm{B1}\}$，$\mathrm{MPtype}(w_9)=\{\mathrm{O4}\}$，$\mathrm{MPtype}(w_8)=\{\mathrm{B4, B\text{-}4, O1}\}$，$\mathrm{MPtype}(w_4)=\{\mathrm{B\text{-}3}\}$，$\mathrm{MPtype}(w_{11})=\{\mathrm{O2}\}$，$\mathrm{MPtype}(w_2)=\{\mathrm{I4}\}$，

$\mathrm{MPtype}(w_{15}) = \{\text{B-2}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_{13}) = \{\text{I1}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_{14}) = \{\text{B2}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_6) = \{\text{I3}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_{17}) = \{\text{B3}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_{12}) = \{\text{B-1}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_7) = \{\text{I2}\}$，$\mathrm{MPtype}(w_{10}) = \{\text{B0}\}$，$\mathrm{MPtype}(w_{16}) = \emptyset$ となるので条件(4)を満たしている。従って定理 1 より K_{18} は完全グラフで UMP を持ち，$\mathrm{ump}(K_{18}) = 9$ である。

$k = 11$：

$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \\ 0 & 1 & 3 & 6 & 2 & 11 & 9 & 13 & 20 & 14 & 7 & 21 & 5 & 15 & 17 & 18 & 10 & 4 & 16 & 19 & 8 & 12 \end{pmatrix}$, $c = 3(w_6)$ と定めると，辺集合 $E_0 = \{$ (w_0, w_1), $(w_1, w_3), (w_3, w_6)$, $(w_6, w_2), (w_2, w_{11}), (w_{11}, w_9), (w_9, w_{13}), (w_{13}, w_{20}), (w_{20}, w_{14}), (w_{14}, w_7), (w_7, w_{21})$, $(w_{21}, w_5), (w_5, w_{15}), (w_{15}, w_{17}), (w_{17}, w_{18}), (w_{18}, w_{10}), (w_{10}, w_4), (w_4, w_{16}), (w_{16}, w_{19})$, $(w_{19}, w_8), (w_6, w_{12})$ $\}$ となり辺のタイプは O1, O2, O3, O4, B2, B-2, B-4, I4, I5, B4, B-3, B-5, B1, I2, I1, B3, O5, B-1, I3, B0, B5 となるので条件(3)を満たしている。グラフ (V, E_0) における $\mathrm{MPtype}(w)$ は，$\mathrm{MPtype}(w_0) = \emptyset$，$\mathrm{MPtype}(w_1) = \{\text{O3}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_3) = \{\text{O5}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_6) = \{\text{O1, B2, B1}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_2) = \{\text{B-5}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_{11}) = \{\text{O4}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_9) = \{\text{I2}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_{13}) = \{\text{B0}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_{20}) = \{\text{I1}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_{14}) = \{\text{B-2}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_7) = \{\text{I4}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_{21}) = \{\text{O2}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_5) = \{\text{I5}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_{15}) = \{\text{B-1}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_{17}) = \{\text{I3}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_{18}) = \{\text{B4}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_{10}) = \{\text{B-3}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_4) = \{\text{B5}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_{16}) = \{\text{B-4}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_{19}) = \{\text{B3}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_8) = \emptyset$ となるので条件(4)を満たしている。従って定理 1 より K_{22} は完全グラフで UMP を持ち，$\mathrm{ump}(K_{22}) = 11$ である。

$k = 13$：

$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \\ 0 & 1 & 3 & 6 & 2 & 8 & 13 & 12 & 4 & 17 & 20 & 19 & 15 & 9 & 24 & 16 & 7 & 23 & 21 & 11 & 22 & 5 & 25 & 18 & 10 & 14 \end{pmatrix}$, $c = 4(w_2)$ と定めると，辺集合 $E_0 = \{$ (w_0, w_1), $(w_1, w_3), (w_3, w_6), (w_6, w_2), (w_2, w_8), (w_8, w_{13}), (w_{13}, w_{12}), (w_{12}, w_4), (w_4, w_{17})$ $(w_{17}, w_{20}), (w_{20}, w_{19}), (w_{19}, w_{15}), (w_{15}, w_9), (w_9, w_{24}), (w_{24}, w_{16}), (w_{16}, w_7), (w_7, w_{23})$, $(w_{23}, w_{21}), (w_{21}, w_{11}), (w_{11}, w_{22}), (w_{22}, w_5), (w_5, w_{25}), (w_{25}, w_{18}), (w_{18}, w_{10}), (w_2, w_{14})$ $\}$ となり辺のタイプは O1, O2, O3, O4, O6, B-5, B-1, O5, B0, I3, I1, I4, B-6, B-2, I5, B4, B-3, I2, B3, B2, B-4, B6, I6, B5 となるので条件(3)を満たしている。グラフ (V, E_0) における $\mathrm{MPtype}(w)$ は，$\mathrm{MPtype}(w_0) = \emptyset$，$\mathrm{MPtype}(w_1) = \{\text{O3}\}$，$\mathrm{MPtype}(w_3) =$

$\{\mathrm{O5}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_6)=\{\mathrm{O1}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_2)=\{\mathrm{O2},\mathrm{B5},\mathrm{B\text{-}6}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_8)=\{\mathrm{B2}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_{13})=\{\mathrm{O4}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_{12})=\{\mathrm{B4}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_4)=\{\mathrm{B\text{-}5}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_{17})=\{\mathrm{B\text{-}3}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_{20})=\{\mathrm{I2}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_{19})=\{\mathrm{I5}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_{15})=\{\mathrm{B3}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_9)=\{\mathrm{I4}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_{24})=\{\mathrm{B6}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_{16})=\{\mathrm{B\text{-}4}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_7)=\{\mathrm{I6}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_{23})=\{\mathrm{B\text{-}1}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_{21})=\{\mathrm{B1}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_{11})=\{\mathrm{I1}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_{22})=\{\mathrm{O6}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_5)=\{\mathrm{I3}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_{25})=\{\mathrm{B0}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_{18})=\{\mathrm{B\text{-}2}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_{10})=\emptyset$ となるので条件(4)を満たしている。従って定理 1 より K_{26} は完全グラフで UMP を持ち，$\mathrm{ump}(K_{26})=13$ である。

$k=15$：

$$\sigma=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ 0 & 1 & 3 & 6 & 2 & 8 & 13 & 15 & 4 & 11 & 27 & 21 & 24 & 12 & 19 & 5 & 26 & 25 & 10 & 23 \end{pmatrix.}$$
$$\begin{matrix} 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 29 \\ 28 & 17 & 7 & 16 & 18 & 14 & 22 & 29 & 9 & 20 \end{pmatrix},$$

$c=4(w_2)$ と定めると，辺集合 $E_0=\{\ (w_0,w_1),(w_1,w_3),(w_3,w_6),(w_6,w_2),(w_2,w_8),(w_8,w_{13}),(w_{13},w_{15}),(w_{15},w_4),(w_4,w_{11}),(w_{11},w_{27}),(w_{27},w_{21}),(w_{21},w_{24}),(w_{24},w_{12}),(w_{12},w_{19}),(w_{19},w_5),(w_5,w_{26}),(w_{26},w_{25}),(w_{25},w_{10}),(w_{10},w_{23}),(w_{23},w_{28}),(w_{28},w_{17}),(w_{17},w_7),(w_7,w_{16}),(w_{16},w_{18}),(w_{18},w_{14}),(w_{14},w_{22}),(w_{22},w_{29}),(w_{29},w_9),(w_2,w_{20})\ \}$ となり辺のタイプは O1, O2, O3, O4, O6, O5, B-2, B4, O7, B-1, I6, I3, B3, B-7, B1, B-6, I1, B0, B2, I5, I4, B5, B6, I2, B-4, B7, I7, B-5, B-3 となるので条件(3)を満たしている。グラフ (V,E_0) における $\mathrm{MPtype}(w)$ は，$\mathrm{MPtype}(w_0)=\emptyset$，$\mathrm{MPtype}(w_1)=\{\mathrm{O3}\}$，$\mathrm{MPtype}(w_3)=\{\mathrm{O5}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_6)=\{\mathrm{O1}\}$，$\mathrm{MPtype}(w_2)=\{\mathrm{O2},\mathrm{B1},\mathrm{B3}\}$，$\mathrm{MPtype}(w_8)=\{\mathrm{O4}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_{13})=\{\mathrm{B\text{-}7}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_{15})=\{\mathrm{O6}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_4)=\{\mathrm{B\text{-}4}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_{11})=\{\mathrm{B7}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_{27})=\{\mathrm{B5}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_{21})=\{\mathrm{I3}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_{24})=\{\mathrm{B6}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_{12})=\{\mathrm{I5}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_{19})=\{\mathrm{O7}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_5)=\{\mathrm{I7}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_{26})=\{\mathrm{B\text{-}5}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_{25})=\{\mathrm{B\text{-}1}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_{10})=\{\mathrm{I2}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_{23})=\{\mathrm{B\text{-}3}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_{28})=\{\mathrm{I6}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_{17})=\{\mathrm{B\text{-}6}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_7)=\{\mathrm{I1}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_{16})=\{\mathrm{B4}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_{18})=\{\mathrm{B\text{-}2}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_{14})=\{\mathrm{I4}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_{22})=\{\mathrm{B0}\}$, $\mathrm{MPtype}(w_{29})=\{\mathrm{B2}\}$，$\mathrm{MPtype}(w_9)=\emptyset$ となるので条件(4)を満たしている。従って定理 1 より K_{30} は完全グラフで UMP を持ち，$\mathrm{ump}(K_{30})=15$ である。

$k=17$：

$$\sigma=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ 0 & 1 & 3 & 6 & 2 & 8 & 13 & 4 & 17 & 11 & 18 & 21 & 9 & 28 & 33 & 16 & 20 & 29 & 14 & 7 \end{matrix}$$

$\begin{matrix} 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 & 31 & 32 & 33 \\ 25 & 15 & 31 & 32 & 12 & 23 & 27 & 5 & 30 & 19 & 10 & 24 & 26 & 22 \end{matrix}\Big)$, $c = 17(w_{29})$ と定める

と，辺集合 $E_0 = \{ (w_0, w_1), (w_1, w_3), (w_3, w_6), (w_6, w_2), (w_2, w_8), (w_8, w_{13}), (w_{13}, w_4), (w_4, w_{17}), (w_{17}, w_{11}), (w_{11}, w_{18}), (w_{18}, w_{21}), (w_{21}, w_9), (w_9, w_{28}), (w_{28}, w_{33}), (w_{33}, w_{16}), (w_{16}, w_{20}), (w_{20}, w_{29}), (w_{29}, w_{14}), (w_{14}, w_7), (w_7, w_{25}), (w_{25}, w_{15}), (w_{15}, w_{31}), (w_{31}, w_{32}), (w_{32}, w_{12}), (w_{12}, w_{23}), (w_{23}, w_{27}), (w_{27}, w_5), (w_5, w_{30}), (w_{30}, w_{19}), (w_{19}, w_{10}), (w_{10}, w_{24}), (w_{24}, w_{26}), (w_{29}, w_{22}), \}$となり辺のタイプは O1, O2, O3, O4, O6, O5, O8, B4, B-6, B-7, I3, B5, B-2, I5, B0, B-4, I8, B2, O7, B-1, B7, B1, I1, B-3, B6, I4, B-5, B-8, I6, B8, B3, I2, I7 となるので条件(3)を満たしている。グラフ (V, E_0) における$\mathrm{MPtype}(w)$は，$\mathrm{MPtype}(w_0) = \emptyset$，$\mathrm{MPtype}(w_1) = \{\mathrm{O3}\}$ ，$\mathrm{MPtype}(w_3) = \{\mathrm{O5}\}$ ，$\mathrm{MPtype}(w_6) = \{\mathrm{O1}\}$ ，$\mathrm{MPtype}(w_2) = \{\mathrm{O2}\}$ ，$\mathrm{MPtype}(w_8) = \{\mathrm{O6}\}$ ，$\mathrm{MPtype}(w_{13}) = \{\mathrm{O4}\}$ ，$\mathrm{MPtype}(w_4) = \{\text{B-4}\}$ ，$\mathrm{MPtype}(w_{17}) = \{\mathrm{O7}\}$ ，$\mathrm{MPtype}(w_{11}) = \{\mathrm{I1}\}$ ，$\mathrm{MPtype}(w_{18}) = \{\mathrm{B7}\}$ ，$\mathrm{MPtype}(w_{21}) = \{\mathrm{B8}\}$ ，$\mathrm{MPtype}(w_9) = \{\mathrm{I7}\}$ ，$\mathrm{MPtype}(w_{28}) = \{\text{B-7}\}$ ，$\mathrm{MPtype}(w_{33}) = \{\mathrm{B5}\}$ ，$\mathrm{MPtype}(w_{16}) = \{\mathrm{I4}\}$ ，$\mathrm{MPtype}(w_{20}) = \{\mathrm{B4}\}$ ，$\mathrm{MPtype}(w_{29}) = \{\text{B-6}, \mathrm{I2}, \text{B-8}\}$ ，$\mathrm{MPtype}(w_{14}) = \{\text{B-5}\}$ ，$\mathrm{MPtype}(w_7) = \{\mathrm{B6}\}$ ，$\mathrm{MPtype}(w_{25}) = \{\mathrm{O8}\}$ ，$\mathrm{MPtype}(w_{15}) = \{\mathrm{I6}\}$ ，$\mathrm{MPtype}(w_{31}) = \{\mathrm{B0}\}$ ，$\mathrm{MPtype}(w_{32}) = \{\text{B-2}\}$ ，$\mathrm{MPtype}(w_{12}) = \{\mathrm{I8}\}$ ，$\mathrm{MPtype}(w_{23}) = \{\mathrm{B2}\}$ ，$\mathrm{MPtype}(w_{27}) = \{\text{B-1}\}$ ，$\mathrm{MPtype}(w_5) = \{\mathrm{I3}\}$ ，$\mathrm{MPtype}(w_{30}) = \{\mathrm{B3}\}$ ，$\mathrm{MPtype}(w_{19}) = \{\text{B-3}\}$ ，$\mathrm{MPtype}(w_{10}) = \{\mathrm{I5}\}$ ，$\mathrm{MPtype}(w_{24}) = \{\mathrm{B1}\}$ ，$\mathrm{MPtype}(w_{26}) = \emptyset$ となるので条件(4)を満たしている。従って定理 1 より K_{34} は完全グラフで UMP を持ち，$\mathrm{ump}(K_{34}) = 17$ である。

参考文献

[1] A. D. Berard Jr., Characterizations of metric spaces by use of their midsets: intervals, Fund. Math. 73(1971), 1-7.

[2] M. Itō, H. Ohta and J. Ono, A graph-theoretic approach to the unique midset property of metric spaces, J. London Math. Soc. 60(1999), 353-365.

[3] 伊藤宗彦，大田春外，小野仁, A graph theoretic approach to the UMP，京都大学数理解析研究所講究録 953(1996), 49-60.