Scientific and Educational Reports of the Faculty
of Science and Technology, Kochi University
Vol. 5 (2022), No. 7

球面タイル貼りを用いた「しぼり」をもつ球形曲線折り

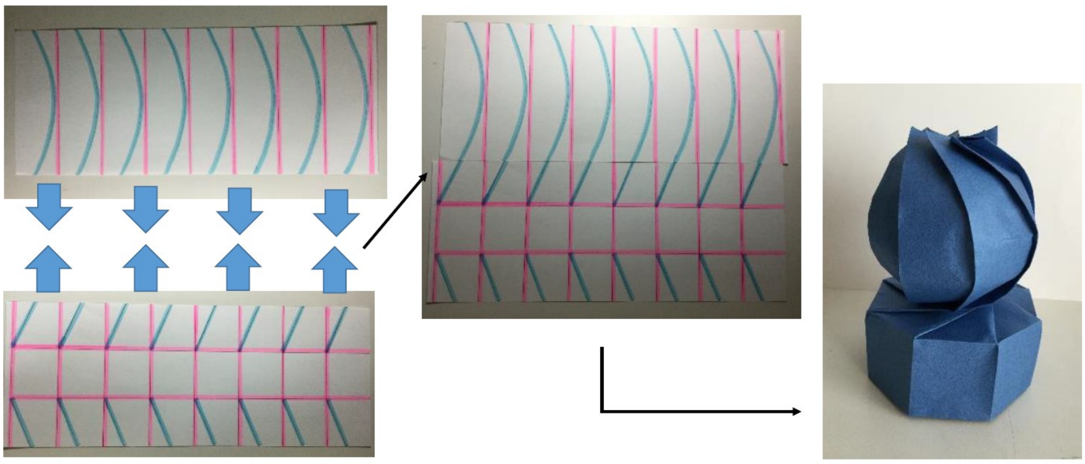
小松和志 Kazushi Komatsu(高知大学理工学部)
星志津李 Shizuri Hoshi*

概要

この論文では「しぼり」と呼ばれる構造をもつ立体折り紙を扱う．角の数が偶数である球面多角形から成る球面タイル貼りから，しぼりをもつ立体折り紙である球形曲線折り紙が得られることを示す．実際に 2 つの例において，球面タイル貼りから，球形曲線折り紙を作成した．特に，そのうちの 1 つではしぼりでリング状につなげることが可能となっている．

§1. イントロダクション

筑波大学の三谷純教授により，様々な立体折り紙が創られている([6],[7],[8],[9],[10])．その中に，「しぼり」と呼ばれる紙の端を重なり合わせ渦状に巻いた構造をもつものがある (例えば， 8 角ボックス， 8 枚羽根の球体 [6],[7],[8],[9])．また， 8 枚羽根の球体の展開図を180°回転させて繋げて折ると，球体が 2 つ連なった形を折ることができるということが知られている ([8],[9])．球体 2 つの繋がりはしぼりの部分がそのまま連結部位となって成立している．このことを踏まえて，8 枚羽根の球体と 8 角ボックスの組み合わせでしぼりの回転の向きが逆になるように繋げると同様に折れることが分かった．

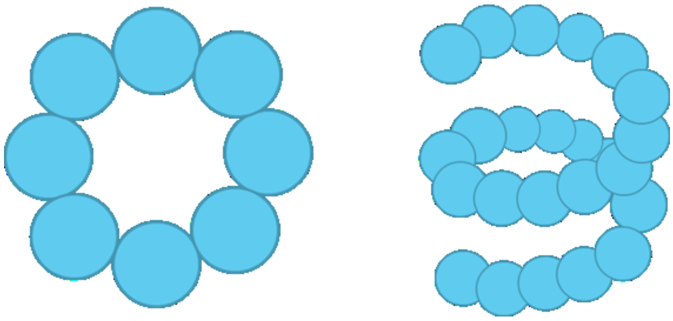


8 枚羽根球体 8 角ボックス[4]

---

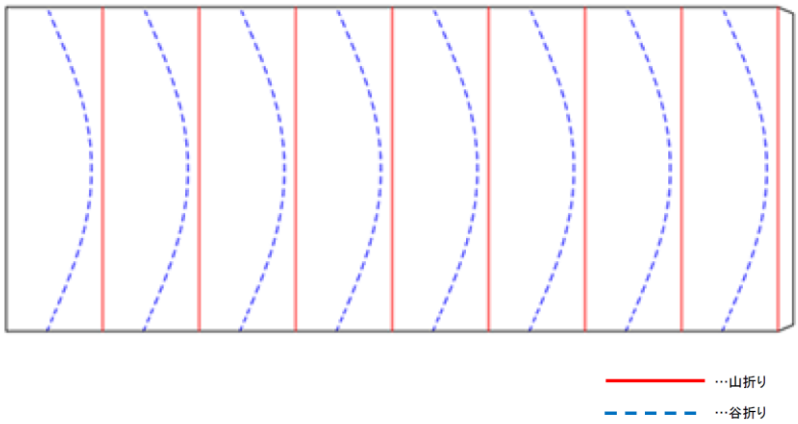
*令和 3 年(2021 年)，高知大学大学院総合人間自然科学研究科修士課程理学専攻修了

ここで，「球を一直線上につなげる以外のつなげ方はできるか」という疑問が生じる (例えば右図のように).

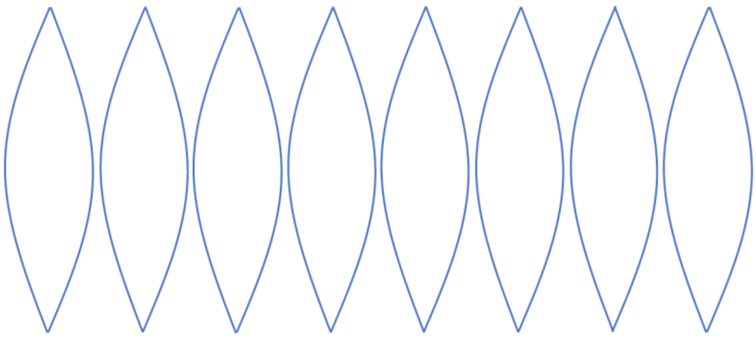


この論文では，「リング状に繋がった球体を折る方法」について考えていくことにする.このとき，球体同士が繋がる箇所にしぼりがくるように展開図を考え直す.

そこで，８枚羽根の球体の展開図の作り方を振り返る．８枚羽根の球体の展開図は下記の通りである.

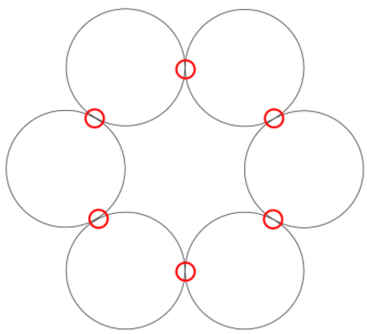


展開図を折って球体にするとき，球体の面を成すのは展開図の次の部分である.



この図から連想されたのは，地図投影法における舟形多円錐図法([5])や縫製におけるダーツという平面的な布を立体化する技法([2])であった．そこで，球面の分割を考え，その分割面を平面化してから，平面に配置する．そしてダーツ技法のように，余分な部分を折り出すことにより，球体を折ろうと考えた．

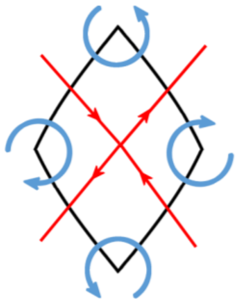
球体をリング状につなぐと，右図のように球体同士がつながっている位置(連結点)は近づく．このことを踏まえてリング状につながった球体のひとつを連結点を通る曲線で切り分けて分割してそれを並べて展開図を作り，実際に折ってみると途中でしぼりの回転の向きが逆になってしまうため，上手くしぼることができない．

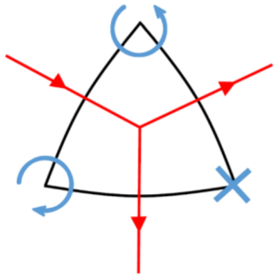


そこで球面の分割の仕方を変えてみることにした．８枚羽根の球体の場合の球面の分割は球面二角形による球面タイル貼りとなっている．そこで，球面 n 角形による球面タイル貼りを使うことができるのではないかと考えた．

§2. しぼりをもつ球形曲線折り

球面二角形の場合と同様に，球面タイル貼りの頂点のところにしぼりを作ることができるような構造を考える．それは，各頂点の周りにしぼりの回転の向きを指定したとき，それらが両立するようにできる球面タイル貼りである．その双対タイル貼りにおいては，タイルである各球面多角形の境界に 1 回りするように辺に向きをつけたとき，全てのタイルの境界に時計回りか反時計回りかの向き付けをうまく指定することを表す．下の２つの図は球面タイル貼りに球面四角形(左)と球面三角形(右)が使われている場合に，頂点の周りの向き(青)と双対タイル貼りの向き付け(赤)を描きいれたものである．





上の右図のように，球面三角形が使われている場合には矢印の向きを定められない箇所が出てきてしまう．同様に，双対タイル貼りの次数が奇数になる場合には矢印の向きを定められない箇所が出てくることも分かる．よって，球面 $2n+1$ 角形(n は自然数)を用いて球面を分割すると，しぼりが上手く折れない箇所が出てきてしまうことが分かる．また，双対タイル貼りが向き付けが可能であるとき，各タイルの境界には時計回りか反時計回りかの向き付けが可能であり，隣り合ったタイルの(反)時計回りの向き付けは異なっている．このとき，時計回りの向きをもつタイルを白色，反時計回りの向きをもつタイルを黒色に塗れば市松模様に彩色されたタイル貼りが得られる．

タイル貼りを市松模様に塗ることができるための条件である次の二色定理が知られている([11])．

<u>二色定理</u>

タイル貼りを市松模様に塗ることができる． $\Leftrightarrow$ 全ての頂点の次数が偶数である．

これまでで分かったしぼりができる展開図を作るための，球面タイル貼りの条件についてまとめておく．

球面タイル貼りに対して，次の(i),(ii),(iii)は同じことを主張する．

(i) 球面タイル貼りは各頂点の周りに回転の向きを指定したとき，それらが両立するようにできる．これがしぼりができることに相当する．

(ii) その双対タイル貼りを市松模様に塗ることができる．

(iii) 球面タイル貼りのタイルは偶数個の角をもつ球面多角形である．

「(ii)その双対タイル貼りを市松模様に塗ることができる．」より，市松模様に塗ることができる球面タイル貼りを考える．最初の取っ掛かりとして，タイルが球面三角形であるものを考える．隣り合った球面三角形のタイル同士が鏡映関係であると仮定するとき，次のように市松模様に塗ることができる球面タイル貼りを網羅的に求めることができる([3])．球面三角形 ABC において，頂点 A, B, C における内角を α,β,γ とする．球面三角形の各辺での鏡映を考えて，球面の市松模様にタイル貼り可能な条件を導くこととする．

$$(\alpha,\beta,\gamma)=\left(\frac{\pi}{a},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right),\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right),\left(\frac{\pi}{5},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$$ (a は 2 以上の自然数)．

球面三角形の角度がこのようなとき，市松模様に塗ることができる球面タイル貼りが存在している*．

$(\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$のとき，球面タイル貼りは正 2a 角錐を底面で接合した多面体を紙風船のようにふくらませて得られる．

$(\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ の場合はそれぞれ正四面体,正八面体,正二十面体の正三角形の面を重心細分したものを紙風船のようにふくらませて得られる球面タイル貼りとなる．

*隣り合ったタイル同士が鏡映関係で無い場合には, [1]の結果である球面三角形による球面タイル貼りの分類から, 全ての頂点の次数が偶数であるタイル貼りを見つけることができる．

次は，タイルが球面三角形ではない場合に市松模様に塗ることができる球面タイル貼りを調べたくなるが，それは一筋縄ではいかない．何故ならば，次の命題が成り立つからである．球面三角形を含む複数種類の球面多角形のタイルが混在する場合を調べなくてはならなくなる．

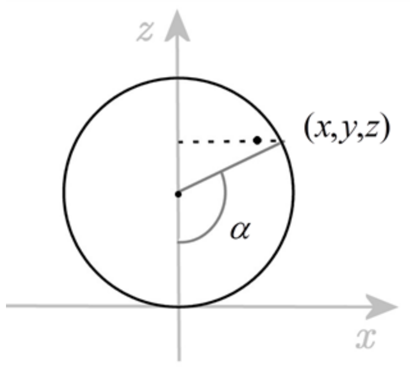
命題

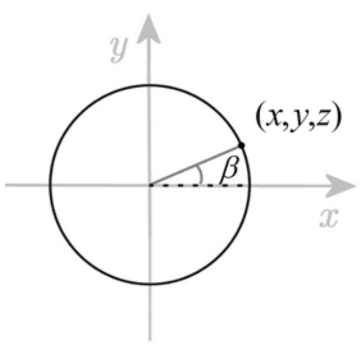
市松模様に塗ることができる球面タイル貼りは，タイルの中に球面三角形が必ず入らなければならない．

[証明] 二色定理により，頂点の次数は偶数であるので，次数が 4 以上であると仮定する．タイル貼りのタイルの数を x，各タイルは n_k 角形($k = 1, 2, \ldots, x$)とする． $s = \sum_{k=1}^{x} n_k$ とおく．オイラーの公式より，$x - (s/2) + (s/4) \geq x - (s/2) + ($ 頂点の数 $) = 2$ であり，よって， $4x - s \geq 8$ が得られる．この式の成立はタイルの中に三角形がなければならないことを意味する． (証終)

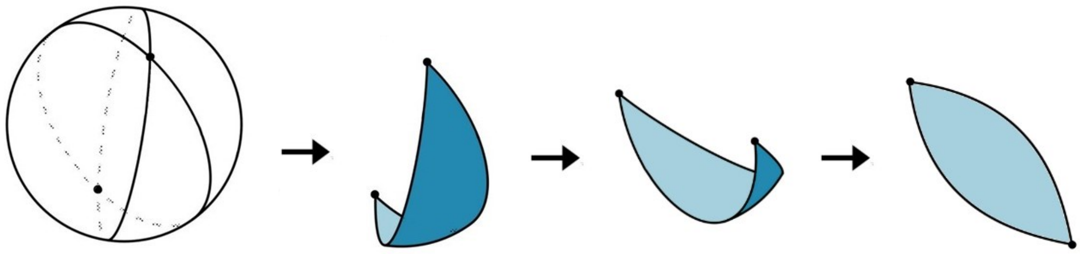
3. 球形曲線折り紙の作成([4])

(実例 I：球体曲線折り) 最初に，上の $(\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, a=2 の場合を考える．この双対タイル貼りから立方体を膨らませてできる球面タイル貼りが得られる．全ての角が120°となるような 6 個の等辺球面四角形によるタイル貼りである．展開図を描くために，タイルである球面多角形から展開図の平面パーツを作る． xyz 空間において, 2 次元球面を原点で xy 平面に接するように置く．すなわち，$S(2) = \{(x, y, z) \in \mathrm{R}^3 \mid x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1\}$ とする．このとき，図のように極座標 (α, β) を採用することにより， $S(2)$ の点 (x, y, z) は $(x, y, z) = (\sin\alpha\cos\beta, \sin\alpha\sin\beta, 1 - \cos\alpha)$ と表すことができる．

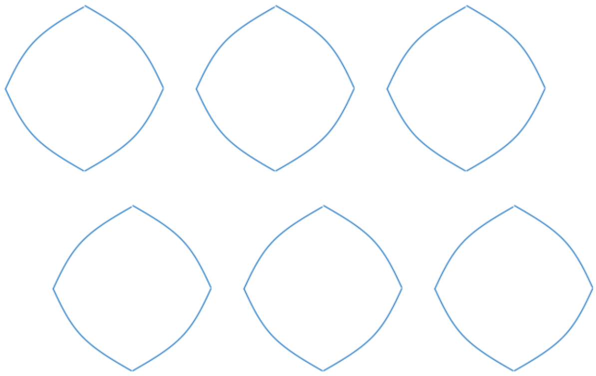




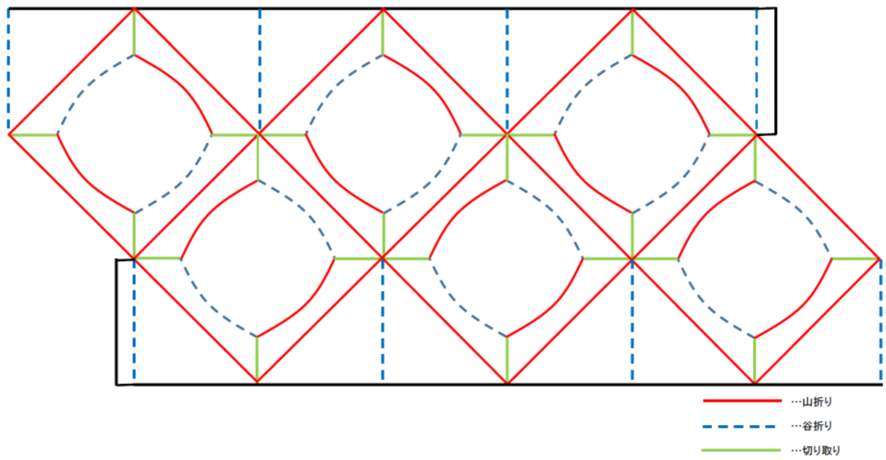
いま，$H=\{(\alpha,\beta)\,|\,0\le\alpha\le\pi,\ -\pi\le\beta\le\pi\}$ とし，写像 $F:H\to\mathrm{R}^2$ を
$F((\alpha,\beta))=(\alpha,\beta\sin\alpha)$ により定義する．
平面パーツとしてタイルである球面多角形の F による像を採用する． F による像は言うならば，球面多角形を緯線により，細かな球面の帯状領域に分割し，それらを平面上に広げて並べたものの，分割を細かくしていったときの極限である．球面二角形の場合は図のようなイメージとなる．



この実例Ｉの場合は，展開図を描くために必要な平面パーツとして，次のような頂点での接線の成す角が 120° であり，曲線部分がサインカーブで与えられた 6 個の膨らんだ正方形が用意される．



　これらを球体として折り上げるために，下図のようにパーツを配置し切れ込みを入れてしぼりを作ってみた．

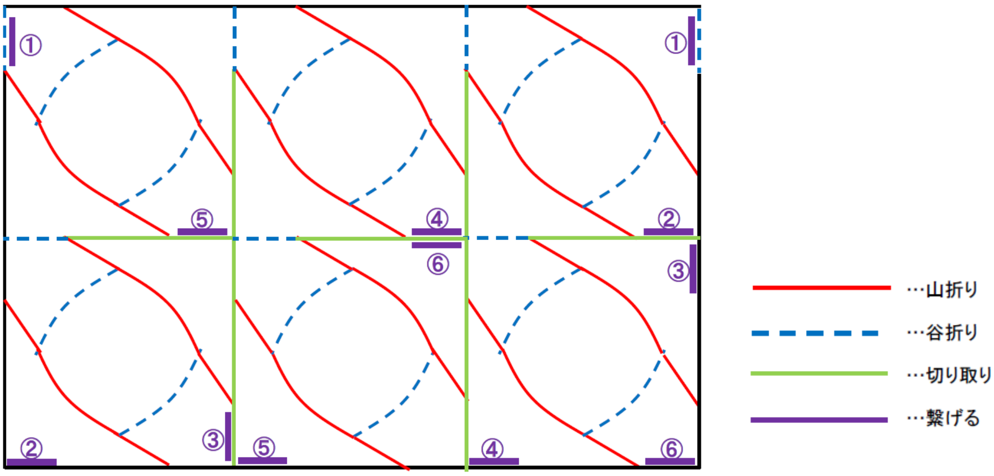


【展開図(切れ込みあり)】

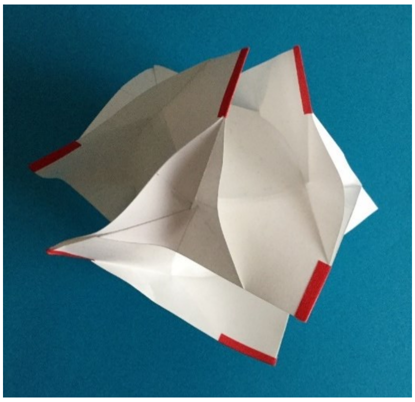
これらを実際に折ったものが下図である.

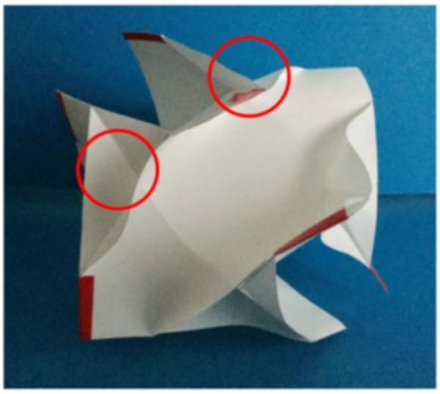
球体というよりは，少しだけ膨らんだ立方体にしか見えない.

二つ以上をリング状に繋げることを考慮して展開図を作り直す．できた展開図がこちらである.



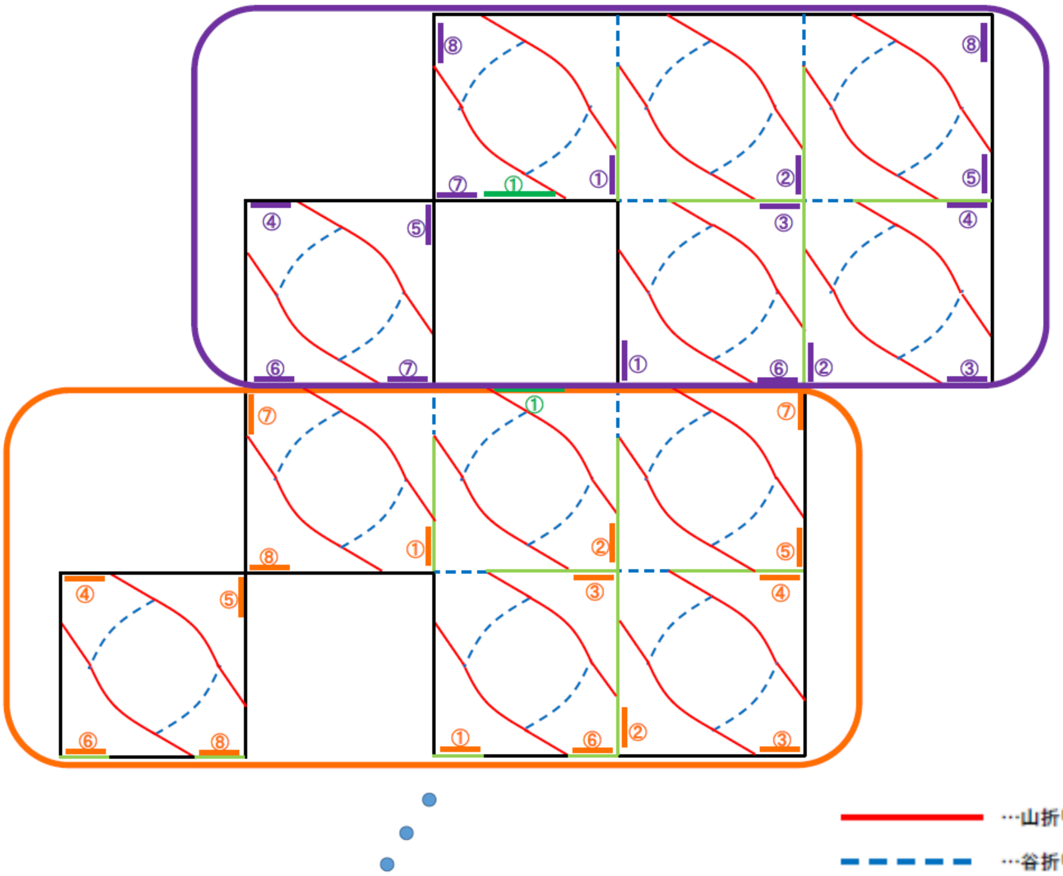
実際に折ったもの(下図)は羽根が大きく,形が安定している．下図の 2 か所のしぼりで繋いでいくことにする.





【繋ぐしぼりの位置を丸で囲んだ図】

展開図を繋いで折っていくと、ちょうど球体 6 つ分で輪になることが分かる．展開図の繋ぎ方は下図の通りである.

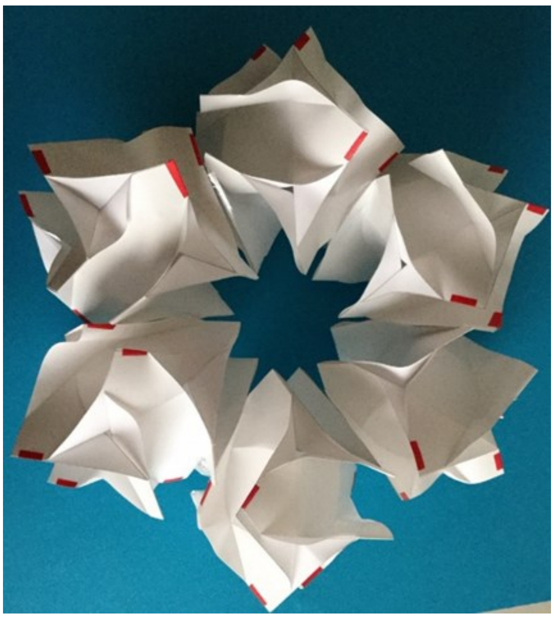


…山折り

…谷折り

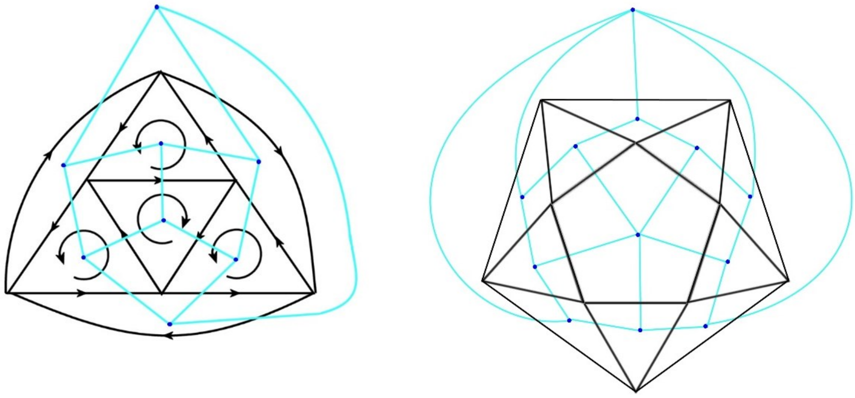
…切り取り

…繋げる



より球体に近づけるため，しぼりでの羽根の数を増やすことを試みる．

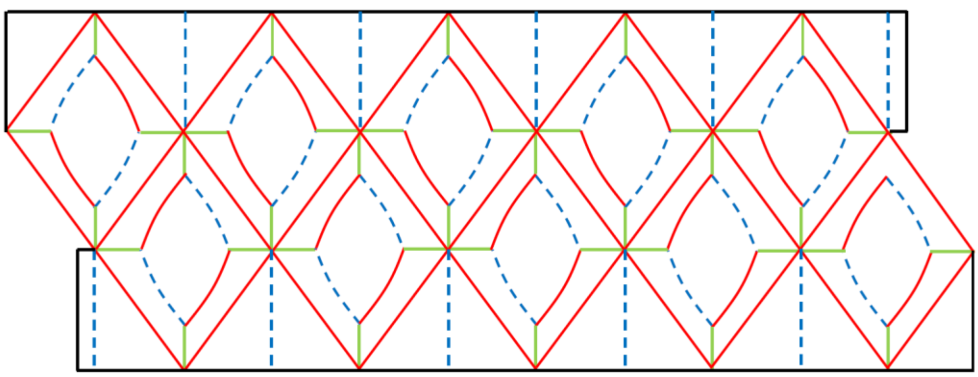
(実例 II：球体曲線折り) (改良案)



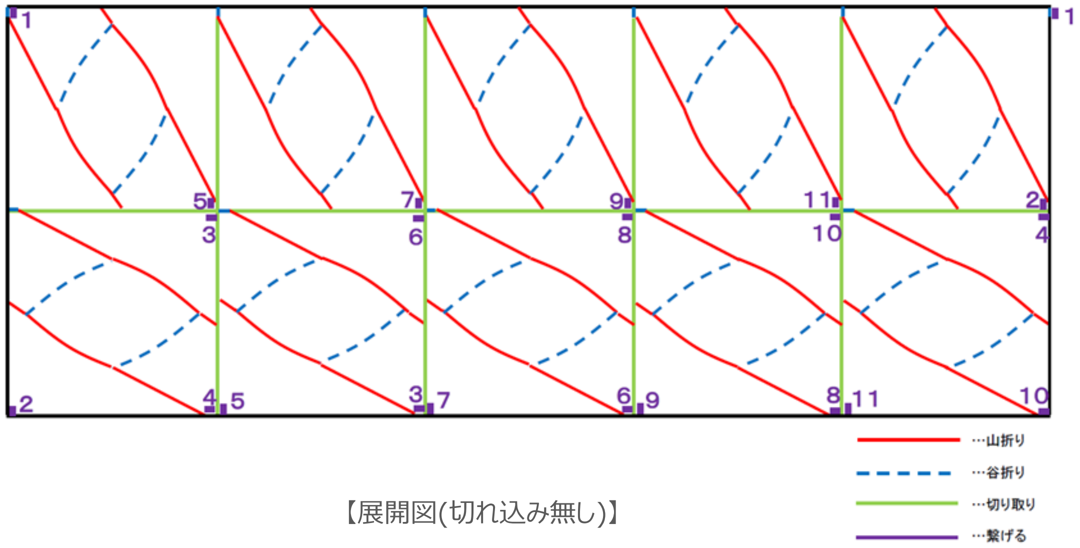
1 つの面を基準にして展開した多面体のグラフ表現

角が 72° と 144° となるような 10 個の等辺球面四角形によるタイル貼りで実現される．これを実際に紙で折るための展開図を考えていく．展開図を描くために必要な平面パーツとして，右のような頂点での接線の成す角が 72° と 144° であり，曲線部分がサインカーブで与えられた 10 個の膨らんだひし形を用意する．

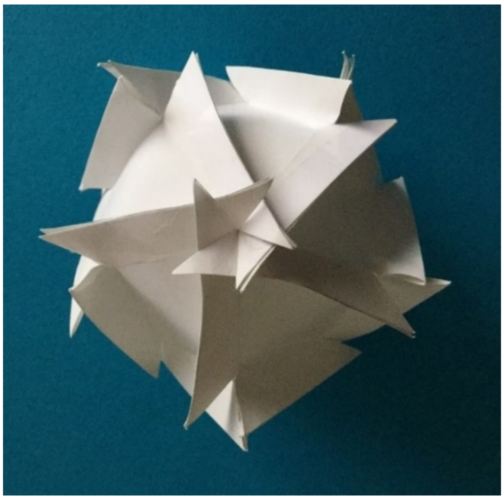
このパーツを使って，2 種類の展開図を作成し，実際に折ってみた．



【展開図(切れ込みあり)】



【展開図(切れ込み無し)】



この場合はしぼりの形状から，リング状につなげていくことは難しそうである.

参考文献

[1] Y. Agaoka,Y. Ueno, Classification of tilings of the 2-dimensional sphere by congruent triangles,Hiroshima Math. J., 32,(2002),463-540
[2] 篠原昭，衣服の幾何学，光生館 (1997)
[3] 難波誠，群と幾何学，現代数学社 (1997)
[4] 星志津李，立体折り紙について，修士論文，高知大学大学院理学専攻(数学) (2020 年度)
[5] 政春尋志，地図投影法，朝倉書店 (2011)
[6] 三谷純，ふしぎな球体・立体折り紙，二見書房 (2009)
[7] 三谷純，立体ふしぎな折り紙，二見書房 (2011)
[8] 三谷純，立体折り紙アート 数理がおりなす美しさの秘密，日本評論社 (2015)
[9] 三谷純，曲線が美しい立体折り紙 (レディブティックシリーズ no.4463)，ブティック社 (2017)
[10] 三谷純，曲線 折り紙デザイン 曲線で折る７つの技法，日本評論社(2018)
[11] 片山良一，一筆書き，大阪教育大学(https://www.osaka-kyoiku.ac.jp/~katayama)